A propos des nombres concrets et abstraits : Un témoignage historique sur l'école primaire française

Michel Delord - Banff, 5 décembre 2004

Une question a été posée bien des fois, sur laquelle je ne veux pas m'appesantir, car j'y ai déjà répondu souvent dans des articles, dans des livres ou de vive voix ; c'est celle-ci : Les sciences ontelles plus d'importance pour l'homme que les lettres et, par conséquent, faut-il donner aux enfants une éducation scientifique de préférence à une éducation littéraire; ou bien, faut-il leur donner une éducation littéraire de préférence à une éducation scientifique.

Voici ce que j'ai répondu invariablement : autant vaudrait se demander s'il est plus nécessaire un homme de manger que de dormir ; s'il est plus utile de le priver de nourriture en lui permettant le sommeil, ou de le priver de sommeil en lui permettant de s'alimenter.

Je déclare que, dans un cas comme dans l'autre, les choses se passeraient en fin de compte exactement de la même manière ; et que le résultat serait, à bref délai, le passage de vie à trépas du bonhomme soumis à un tel régime.

Or nous sommes depuis longtemps en train de faire à peu près la même sottise pour les deux moitiés de la jeunesse française, pour la catégorie des littéraires et celle des scientifiques. En pratiquant une éducation littéraire opposée à l'éducation scientifique, en élevant de futurs avocats qui n'auront pas l'idée de la façon dont peut fonctionner une locomotive, à côté desquels on pourra voir des ingénieurs possédant peut-être de très fortes connaissances mathématiques, et ignorant toute leur vie qu'il a existé un homme qui s'appelait Rabelais et un autre nommé Paul-Louis Courier, on instituera deux castes de demi-hommes, mais l'on ne fera jamais, ni une humanité, ni une société, ni une patrie.

Il est même honteux et humiliant, dans un milieu qui se dit civilisé, de penser qu'une pareille question ait jamais pu être posée !

Charles-Ange Laisant, *L'éducation fondée sur la Science*, F. Alcan 1904, p. 71

Depuis la contre-réforme de 1970, il y a eu un progrès certain. La suppression de l'enseignement des nombres concrets a signifié de plus la séparation des mathématiques de "ses domaines d'application" : à côté de la production de littéraires sans connaissances scientifiques, l'école produit maintenant des étudiants en mathématiques qui ne connaissent pas la physique , des physiciens qui ne connaissent pas les mathématiques …

Elle a donc passé du stade artisanal de la production de demi-hommes au stade industriel de la production de fractions d'hommes, de quarts d'hommes, de huitièmes d'homme …. qui forment ainsi l'élite diplômée de nos pays.

J'essaierai de donner, en partant de l'exemple de l'école des années 1900, des éléments sur les grandeurs qui permettent modestement de retrouver l'unité.

Michel Delord, 23 Novembre 2004

Vous pouvez consulter un commentaire de *Rudolf Bkouche* sur ce texte :

Quelques remarques sur le texte de Banff **:** http://michel.delord.free.fr/banff-rb.pdf

* * *

* * *

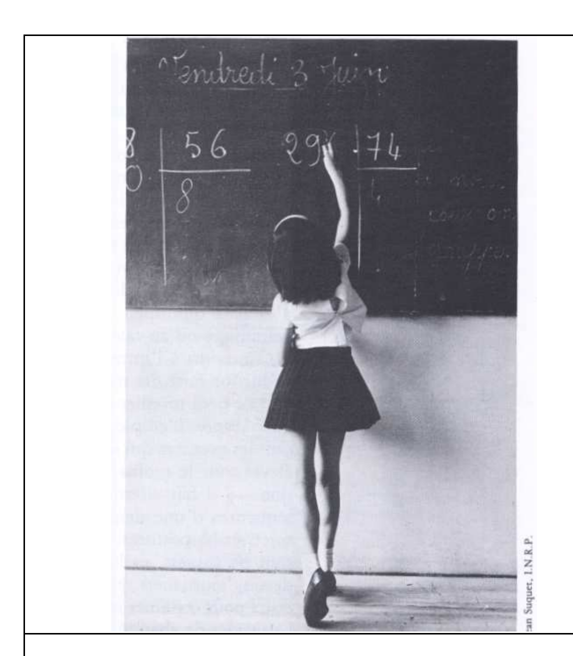
Un témoignage historique sur l'école primaire française

L'enseignement logique est pour les mathématiques ce qu'est le squelette pour un organisme animal qui ne saurait se tenir sans squelette; mais ce serait une étrange zoologie que celle qui ne traiterait jamais que du squelette des animaux.
***Felix Klein*[i].**

"Les programmes de l'école primaire française sont en moyenne en avance d'un ou deux ans sur ceux des écoles étrangères"

L'école primaire française a été pendant longtemps une des meilleures du monde. Ceci est attesté dès les années 1880 puisque *Friedrich Engels* dit, dans une lettre à *A. Bebel* du 28 Octobre 1885 « *Les Français disposent à présent des meilleures écoles du monde.* ». " *A présent* " fait directement allusion aux lois Ferry, ministre de l'Instruction Publique, mises en place à partir de 1881/1882. Il vise en particulier ce qui nous intéresse ici : les programmes impératifs nationaux de l'école primaire qui varieront finalement très peu de cette date à 1970 soit pendant plus d'un siècle.

Cet excellent niveau de l'école primaire française est également attesté, *a contrario*, par *Antoine Prost*, un des principaux théoriciens artisans de la *dumbing down* réforme des années 70, réforme qui va prendre le contre-pied de la philosophie, des programmes et des progressions précédents. Voici un extrait de son livre décrivant l'école des années 50[ii] :



La division est un art difficile, surtout quand on est si petite. Les programmes de l'école primaire française sont en moyenne en avance d'un ou deux ans sur ceux des écoles étrangères, mais près de !a moitié des élèves redoublent au moins une fois.

"On trouve par exemple au programme du cours moyen 2e année les opérations sur les fractions, l'analyse des phrases à 3 ou 4 propositions ou l'accord du participe passé, alors qu'il faut attendre 13-14 ans pour que ces notions soient acquises par 75 % des élèves.
D'après les comparaisons internationales faites par R. Dottrens en 1954, les petits Français apprennent à conjuguer les verbes deux ans plus tôt que les Allemands ou les Hollandais ; ils commencent l'analyse logique deux ans avant les Allemands, quatre ans avant les Italiens ; ils doivent savoir compter jusqu'à 1000 quand leurs voisins les plus avancés s'arrêtent à 20 ; ils apprennent la multiplication et la division par des nombres à deux chiffres un an avant les Allemands et les Hollandais, deux ans avant les Belges ou les Italiens. Quand les Belges et les Hollandais abordent le calcul des pourcentages dans la 5e année d'école, et les autres dans leur 6e, les Français s'y attaquent dès leur 4e année d'études. Au vrai, l'une des caractéristiques de l'éducation française est précisément d'inculquer des notions à des enfants trop jeunes encore pour les assimiler, ou de leur demander des comportements qu'ils ne peuvent encore pratiquer physiquement."

Si, en moyenne et pendant prés d'un siècle, l'école primaire française avait deux ans d'avance sur les écoles des autres pays cités, il n'est pas inintéressant de comprendre quelques raisons de son succès et c'est à quoi je vais m'attacher ici.

Problématique générale de la contre-réforme des années 1970

Cette réforme est une réforme complète de la conception précédente de l'école. Elle correspond à la mise en place d'une conception pédagogique générale centrée sur la réforme de l'enseignement des mathématiques - les

maths modernes- et du français[1], pour lequel l'introduction de la "*communicative approach*" finira par remplacer l'étude de la langue écrite "savante", ce qui revient à aller à l'école … *pour apprendre de la langue ce qu'on en sait sans aller à l'école[2]*. Il faut noter la responsabilité historique de la nouvelle didactique, inventée à cette époque comme pédagogie des mathématiques, qui introduira pour les mathématiques les concepts - comme par exemple la *transposition didactique[3]* - qui s'étendront ensuite à toutes les matières.

Deux facteurs, convergents dans l'augmentation du coût de la scolarité, vont avoir une influence fondamentale sur les positions des décideurs :

- la volonté d'augmenter la durée de l'obligation scolaire qui, passée à 14 ans depuis 1938 atteindra 16 ans en 1959 (Réforme *Berthoin* dont l'effet complet n'existera qu'en 1967)
- le baby boom de l'après-guerre qui oblige à scolariser un nombre plus grand d'élèves.

Face à cette double menace d'augmentation de l'effectif des élèves scolarisés, les décideurs politiques et économiques[4], affolés par "*L'explosion scolaire*"[5], vont être sensibles à toute argumentation qui permet d'en diminuer les coûts en l'abrégeant. Parmi ceux-ci en figurent deux fondamentales :

- i) ***Enseigner directement l'abstrait***. Par exemple faire directement des "mathématiques pures" en primaire au lieu de se contenter d'y faire du calcul et de l'arithmétique. Ou reporter sur le lycée une partie de l'enseignement normalement réservé à l'Université :

> "*This meeting, the Royaumont Seminar, took place in the autumn of 1959 in France. Together with an associated survey of current practice, it had been conceived within the OEEC earlier in 1959 for "the purpose of improving mathematics education" for "university-capable" pupils.. Since there is no turning back, nor hope of lengthening the years of study devoted to mathematics, there is a "squeeze" in the course of this study. The only solution is for the secondary school to take on some of the burden now resting on the university* [underlined by me, MD], *perhaps as much as is compatible with the intellectual ability of secondary school pupils*"[iii]

- ii) ***Alléger les programmes***. Puisque selon *Antoine Prost*, les redoublements sont dus au fait que le système scolaire français apprend aux élèves trop de choses trop tôt, on introduit une *pédagogie qui allége les contenus sous le prétexte général qu'on apprend mieux s'il y a moins à apprendre*. Cette affirmation est tout à fait vraie pour un enseignement réduit à l'apprentissage de procédures et de compétences à usage immédiat, soit disant pratique mais en fait aveugle, exclusivement axé sur la mémorisation et dans lequel on ne comprend pas ce que l'on apprend. Mais

  - elle devient complètement fausse dès que l'on vise un apprentissage de connaissances dans lequel les notions enseignées entretiennent des rapports logiques puisque, dans ce cas, la suppression par allégement d'un anneau de la chaîne du raisonnement rend l'apprentissage des notions restantes plus difficile ou même impossible : " *Les vérités ne sont fécondes que si elles sont enchaînées les unes aux autres. Si l'on s'attache seulement à celles dont on attend un résultat immédiat, les anneaux intermédiaires manqueront, et il n'y aura plus de chaîne."*(Henri Poincaré[iv]).

  - elle crée par elle-même une dynamique de l'allègement : "***spirale infernale qui prétend faciliter la compréhension en allégeant les savoirs fondamentaux***. *Le résultat en est l'exact contraire : la « structure en gruyère » des programmes rend plus difficile ou même impossible*

---

[1] Lire pour cela le texte de la *Commission Rouchette* (1964-1969) : http://michel.delord.free.fr/rouchette.pdf

[2] Henri Poincaré, in *Les sciences et les humanités* http://michel.delord.free.fr/poincare-sh.pdf

[3] Ce concept, qui oppose le *savoir savant* et le *savoir enseignable* a bien sur pour origine l'impossibilité d'enseigner le savoir savant - les maths modernes - en primaire.

[4] A partir de cette période, il existe un lien de coopération permanent entre la "recherche pédagogique" et les décideurs. comme ces derniers sont aussi les payeurs, les seules *recherches* subventionnées seront celles qui fourniront des résultats qui permettent des économies de gestion locaux et à court terme même si les résultats réels en sont catastrophiques. Un exemple particulièrement flagrant en est la question des redoublements.

[5] Titre du best-seller de 1961 de *Louis Cros*. Ce livre est cité en janvier 1968 comme référence dans la *Charte de Chambéry* qui est la charte de création du mouvement des maths modernes (http://michel.delord.free.fr/chambery.pdf)

la compréhension des savoirs fondamentaux rescapés. Cela servira de prétexte à d'autres allégements mais surtout détruit déjà chez l'enfant toute possibilité d'accession à la rationalité, lui apprend au contraire systématiquement à « penser » de manière incohérente et réduit l'enseignement à des contenus procéduraux qui ne peuvent même plus être maîtrisés car la simple maîtrise de mécanismes suppose justement un minimum de rationalité."(Pétition contres les nouveaux programmes du primaire, Novembre 2001[v])

* * *

En ce sens, la problématique toujours en action de la contre-réforme des années 70

- i) ***n'est pas simplement un allègement mais une forme de l'obscurantisme moderne***,

  - *obscurantiste* et moyenâgeuse au sens historique comme le montre *infra* l'exemple des programmes du CP qui retournent *effectivement* aux méthodes d'enseignement précédant les Lumières

  - *moderne* car elle ne voit un "sens" aux contenus enseignés que dans leurs applications (obsession des *manipulatives*[6]) en partie car elle intègre l'utilitarisme qui ne vise qu'à "*décrocher des brevets*"[7] ce qui n'était certes pas le cas de la scolastique historique.

ii) est pire que la conjonction formelle de la scolastique et de l'empirisme/sensualisme historiques :

  - analysés de manière historique, ceux-ci ne sont pas des régressions car la dynamique de l'évolution de la scolastique est un progrès et le recours à l'expérience est lui-même un élément qui permet de dépasser le dogmatisme de la vérité révélée

  - la scolastique historique préservait la "logique des contenus" ce que la dynamique des réformes a détruit en vidant la notion de programmes de son contenu en vidant les programmes de leurs contenus, et … Sir Francis Bacon ne visait certes pas à *décrocher des brevets*.

iii) ***aboutit***, *justement parce qu'il ne s'agit pas d'un simple allégement* ***à ce que, pour la première fois depuis la fondation de l'école moderne au XIX[ème] siècle, la fréquentation de l'école, l'augmentation des horaires ne soient pas des progrès en soi et produisent même une régression mentale des élèves***. Ce point pourtant fondamental, qui justifie en partie l'existence du home-schooling, ne sera pas développé ici : sans aborder le rôle des méthodes de lecture dans l'augmentation des pathologies traitées en cabinet d'orthophonie[8], on peut brièvement évoquer l'exemple du calcul mental pour lequel il vaudrait mieux qu'il ne soit pas enseigné en primaire plutôt qu'il le soit comme il l'est. En effet depuis qu'il y est enseigné comme *calcul réfléchi* mélangeant calcul écrit et calcul mental, l'enseigner véritablement ensuite suppose de passer un temps considérable à désapprendre les automatismes qui ont été précédemment enseignés.

La méthode intuitive :
L'exemple de la lecture et du calcul en Cours Préparatoire (Grade 1)

Au contraire des *théories de l'allégement*, l'efficacité de l'enseignement des années 1880 à 1970 s'appuie, pour en accélérer l'apprentissage, sur la synergie apportée par l'apprentissage des différentes matières et sur celle apportée par l'apprentissage des différents concepts liés à l'intérieur d'une même matière : d'où l'importance de la cohérence et de la compacité des programmes (que l'on appelait alors plan d'études). Cette orientation est une des bases de la "méthode intuitive", méthode pédagogique destinée surtout à l'enseignement primaire et dont les principes seront répétés à chaque début des *Instructions Officielles* jusqu'en 1945. On peut en prendre comme exemple caractéristique le programme du Cours Préparatoire (Grade 1) en nous appuyant sur les positions de son principal théoricien, Ferdinand Buisson (1841-1932). Celui-ci a été directeur de l'enseignement primaire au Ministère de l'Instruction Publique entre 1882 et 1896, auteur d'un monumental *Dictionnaire de pédagogie et*

---

[6] Voir sur le site de *William G. Quirk*, The Truth About Math Reform, la partie consacrée à *Hands on maths* [littéralement "*La main à la pâte en mathématiques*"] : http://wgquirk.com/TERC.html

[7] *Philippe Joutard et Claude Thélot,* ***Réussir l'école, Pour une politique éducative,*** *Le Seuil, 1999, 292pages, page 179.*

[8] Colette Ouzilou, ***Dyslexie, une vraie fausse épidémie***, Presses de la Renaissance, 2002.

d'instruction publique (7000 pages en 4 tomes) destiné aux instituteurs et écrit par l'élite intellectuelle de l'époque. Il la décrit ainsi :

> *En quoi consiste la méthode intuitive dans toutes les études primaires qui ne se peuvent borner aux leçons de choses? En une certaine marche de l'enseignement qui réserve à l'enfant le plaisir et le profit, sinon de la découverte et de la surprise, ce qui serait peut-être trop promettre, au moins de l'initiative et de l'activité intellectuelle. On peut dire qu'on l'instruit par l'intuition, alors même qu'on ne lui montre ni objets ni images, toutes les fois qu'au lieu de lui faire suivre passivement son maître et répéter docilement une leçon toute faite, on le provoque à chercher, on l'aide à trouver, on le met sur la voie, suivant une vieille et bien juste image, lui laissant ensuite le mérite d'y faire quelques pas de lui-même.*
>
> *On pourrait presque dire qu'il y a deux logiques: celle de l'enfant et celle de l'adulte, l'une qui est toute naturelle et intuitive, l'autre plus savante, plus réfléchie, plus méthodique. C'est une grande tentation pour le maître de suivre cette dernière voie, parce que c'est la seule rationnelle, la seule qui satisfasse son esprit à lui, son besoin d'enchaînement et de déduction régulière: c'est celle qui est vraiment naturelle à l'homme fait. Elle va du simple au composé, du principe à la conséquence, de la règle à l'exemple. Et c'est justement ce qui fatigue et rebute l'enfant.*
>
> *Et les anciennes méthodes étaient inexorables au nom de la logique sur la nécessité de ces interminables préliminaires. Voulait-on apprendre à l'enfant à lire? On prétendait commencer par lui apprendre toutes ses lettres, puis leurs combinaisons en syllabes, avant d'arriver à un mot et surtout une phrase. Quel désert à traverser pour la pauvre petite intelligence! De la lecture on passait l'écriture et l'on procédait de même: non pas le mot d'abord, non pas même la lettres, mais les jambages, les «bâtons». Qui ne se rappelle les longues pages de «bâtons» de sa première école? Et de même à mesure qu'on passait à quelque autre étude: en géographie, la nomenclature et la définition apprise par coeur de tous les termes géographiques, et puis la définition de la terre, sa division en océans et continents, et leur énumération et l'énumération de leurs subdivisions, le tout avant d'arriver un seul nom familier à l'enfant, à un seul objet de sa connaissance.*
>
> *Tout cela était-il absurde, illogique, déraisonnable? Nullement. C'était la marche d'un esprit mûr qui, sachant réduire en idées abstraites la science qu'il doit étudier, prend tout d'abord les plus simples et les enchaîne graduellement en combinaisons de plus en plus complexes et toujours rigoureusement subordonnées les unes aux autres. Tout autre est la marche de l'esprit enfantin qui veut aller vite et joyeusement du connu à l'inconnu, du concret à l'abstrait, du facile au difficile, plutôt par bonds que pas à pas. On a dit quelquefois que l'intelligence de l'enfant est capricieuse: elle ne l'est pas,elle nous semble l'être parce qu'elle n'a pas la continuité et la régularité de la nôtre; elle aime à deviner,à découvrir, à jouir de l'étude au lieu de s'y astreindre, à jouir surtout de la conscience de sa force et de sa liberté, à se sentir agir. L'enfant se montre pour les exercices de l'esprit ce qu'il est pour ceux du corps: une longue promenade régulière et monotone l'abat et l'énerve, un exercice méthodique de gymnastique ne le récrée qu'à la condition d'être très court; laissez-le, au contraire, courir en liberté, s'ébattre à son gré, changer d'exercice et s'exercer sans y penser, alors il est infatigable. La méthode intuitive, telle qu'elle s'applique aujourd'hui à toutes les matières de l'enseignement primaire, n'a pas d'autre objet que de tenir compte de ce besoin de spontanéité, de variété et d'initiative intellectuelle de la part de l'enfant.*
>
> *En lecture, au lieu de lui faire passer en revue toutes les lettres et toutes les syllabes vides de sens, on lui donne, dès qu'il sait deux ou trois lettres, de petits mots qui occupent sa pensée, satisfont son imagination, aiguisent sa curiosité pour les leçons suivantes, chaque leçon portant pour ainsi dire sa récompense en elle-même: l'ordre logique peut en souffrir, et il faut que l'enfant plus d'une fois supplée par une sorte de divination ou d'intuition à ce qui lui manque rigoureusement pour être en état de déchiffrer le mot, mais c'est là précisément qu'est le plaisir pour lui; l'obstacle est franchi, il a le sentiment de la conquête qu'il vient de faire; il n'est pas encore à l'âge où l'on tient à se rendre compte minutieusement et consciencieusement des procédés qu'on a suivis, et il ne demande qu'à poursuivre. On aura le temps plus tard de lui faire analyser ce qu'il saisit à présent d'un coup d'oeil juste, mais trop rapide.*
>
> *En géographie, on l'entretient tout d'abord de ce qu'il a sous les yeux tout près de lui: et par analogie on lui fait comprendre, en étendant progressivement son horizon, tous les grands phénomènes qu'il n'a pas vus à l'aide des petits qu'il voit.*

En arithmétique, on ne commence pas par lui révéler les nombres abstraits, leurs rapports et leurs lois: c'est sur les objets concrets qu'on exerce d'abord son attention, et l'on se sert des sens non pour qu'il y ait recours toute sa vie, mais pour lui apprendre à s'en passer : le moment ne tarde pas où l'on peut lui faire faire de tête et par intuition des opérations qu'il ne pourra rigoureusement raisonner que bien des années après. Il n'y a pas d'enfant qui ne puisse faire mentalement et sans efforts des soustractions, des multiplications, des divisions sur les dix premiers nombres, voire même sur les fractions, longtemps avant de soupçonner même le nom des quatre règles.

En grammaire, et là peut-être plus utilement que partout ailleurs, l'intelligence de l'enfant peut être livrée à elle-même provoquée à trouver la règle et non astreinte toujours à l'appliquer passivement, encouragée à procéder par analogie, à faire proprio motu les généralisations que le livre donne sans doute toutes faites et toutes classées, libre effort de l'esprit, de l'exercice même de la pensée et de la parole.
[Ferdinand Buisson, Article *Intuition et méthode intuitive*, in *Dictionnaire de pédagogie et d'instruction primaire*, Hachette, 1887. Tome 2 de la première partie, pages 1374 à 1377.][vi]

Sa grande force, contre les méthodes précédentes que F. Buisson qualifie à juste titre d'archaïques, scolastiques et moyenâgeuses, est de s'appuyer sur :

- i) l'apprentissage simultané de la lecture et de l'écriture (méthode dite d'écriture lecture) alors que les méthodes précédentes en séparaient l'apprentissage.

-ii) l'apprentissage simultané de la numération et des opérations ou plus précisément l'apprentissage simultané des 4 opérations au fur et à mesure des progrès dans l'apprentissage de la numération (*Le calcul intuitif*) alors que les méthodes précédentes apprenaient d'abord la numération puis successivement chaque opération séparément : en effet,

- la numération est liée aux opérations : 340 signifie bien 3 *fois* 100 *plus* 4 *fois* 10
- chaque opération se définit par rapport aux autres opérations
- la "connaissance intime du nombre "(*René Thom*) n'intervient que si un nombre est conçu comme résultat des différentes opérations : on ne comprend vraiment ce qu'est 6 qu'une fois dépassée la compréhension de sa place dans le comptage (entre 5 et 7) pour savoir qu'il est le résultat de 4+2, 5+1, 7-1, 8-2, 2×3, 6×1, le quotient des nombres 12 à 17 par 2… Mais laissons parler F. Buisson :

"*Dégagée des considérations psychologiques qui l'ont inspirée, [la méthode du calcul intuitif] fait faire aux enfants, d'eux-mêmes et par intuition, les opérations essentielles du calcul élémentaire ; elle a pour but de leur faire connaître les nombres : connaître un objet, ce n'est pas seulement savoir son nom, c'est l'avoir vu sous toutes ses formes, dans tous ses états, dans ses diverses relations avec les autres objets ; c'est pouvoir le comparer avec d'autres, le suivre dans ses transformations, le saisir et le mesurer, le composer et le décomposer à volonté. Traitant donc les nombres comme un objet quelconque qu'il s'agirait de rendre familier à l'intelligence de l'enfant, Grube s'élève contre l'antique usage d'apprendre successivement aux élèves d'abord l'addition, puis la soustraction, puis les deux autres règles*."[F. Buisson[vii]]

- iii) une compréhension fine, à propos du calcul mental, de la liaison initiale entre l'apprentissage de la langue et celui du calcul[9]. En effet le calcul mental apparaît dans le *Dictionnaire pédagogique* avec deux objectifs complémentaires :

- a) un objectif général appuyé sur le fait que le calcul mental est exclusivement basé sur la numération parlée et pas du tout sur la numération écrite: l'élève ne doit pas se représenter "*la langue des nombres comme étant nécessairement une langue écrite. Au contraire, il faudrait bien le familiariser avec cette idée que l'arithmétique parlée précède l'arithmétique écrite*", le tout à a fois pour combattre "*l'usage trop habituel de l'écriture pour les calculs les plus simples*" et avec comme objectif de développer chez l'élève "*une gymnastique intellectuelle de la plus haute importance[qui] fait contracter des habitudes d'analyse et de réflexion qui accroissent bien vite la perspicacité de l'esprit*" car "*c'est par lui que l'esprit s'assimile en quelque sorte la substance de l'enseignement de l'arithmétique , et en recueille tout le fruit*".

- b) au Cours Préparatoire (Grade 1) en tant que *calcul intuitif* comme "*un mode d'enseignement des premiers éléments du calcul*" en tant que calcul *"purement oral"* précédant le calcul écrit pour les petits

[9] Voir en conclusion la référence à H. Poincaré pour la liaison générale entre l'apprentissage de la langue écrite, et notamment la grammaire, et les mathématiques.

nombres. Cette introduction du *calcul intuitif* vise bien sûr à développer l'usage du calcul mental pour *toute* la scolarité : elle permet

- d'apprendre ***effectivement*** l'usage et l'habitude du calcul mental au lieu de prétendre qu'il faut l'apprendre et d'apprendre des techniques de calcul ***effectivement mentales*** (i.e. basées sur la numération orale) puisque l'élève n'a à ce stade pas d'autres modes de calcul,
- de montrer également la nécessité et la supériorité du calcul écrit qui permet de traiter des opérations qui ne peuvent l'être par le calcul mental.

On peut de plus assez facilement montrer, dans les trois exemples que nous donnons, que la modernité représentée par les principales découvertes de la pédagogie des quarante dernières années est un retour aux méthodes scolastiques qui utilisent démesurément la mémoire au détriment de l'intelligence et de l'intuition :

- i) les méthodes fonctionnelles ou mixtes séparent à nouveau l'écriture de la lecture puisque les élèves "lisent" systématiquement des phases qu'ils ne peuvent pas écrire

- ii) on est retourné progressivement à la séparation de l'apprentissage de la numération et du calcul (Voir en annexes *Bref historique de la disparition de l'enseignement des opération**s***)

- iii) on a détruit ce qui faisait la force du calcul mental, c'est-à-dire son caractère de calcul exprimé en numération parlée puisque l'on a introduit le "calcul raisonné " qui efface les frontières entre calcul mental et calcul écrit.

Le point principal de rupture en 1970 :
L'abandon des opérations sur les grandeurs

Il ne s'agit pas d'une analyse que je ferais a posteriori mais de l'affirmation, en 1972, de l'APMEP[10], principale association des professeurs de mathématiques cheville ouvrière de la réforme des mathématiques modernes qui est publiée dans le numéro spécial consacré au Bulletin Officiel[viii], paru en Janvier 1970 qui introduit les maths modernes en primaire. Il s'agit donc d'une affirmation centrale et réfléchie :

> *L'abandon des " opérations sur les grandeurs " est bien la mutation fondamentale apportée par les programmes transitoires, c'est lui qui transforme profondément les démarches de la pensée dans l'enseignement élémentaire* [ix].

Cet abandon du calcul sur les grandeurs - et donc des nombres concrets - dans le BO n'est pas argumenté en tant que tel mais figure sous la forme suivante :

> *Les phrases telles que 8 pommes +7 pommes = 15 pommes n'appartiennent [pas] au langage mathématique*[x]

Ceci est bien sûr une absurdité certes pédagogique mais surtout mathématique puisque dès 1968, soit deux ans avant la publication du B.O. et quatre ans avant le commentaire de l'APMEP, le grand géomètre *Hassler Whitney* publiait un article qui donne un cadre mathématique axiomatique, "moderne", au calcul sur les grandeurs. Il s'agit de *The Mathematics of Physical Quantities*[xi]. Il y déclare notamment – et démontre en donnant une structure mathématique sous-jacente (rays and birays) - qu'il est tout à fait "mathématique" d'écrire :

> *5 cakes + 2 cakes = (5+2) cakes = 7 cakes ou bien 2 yd = 2 (3 ft) = 6 ft*

Le contexte de l'introduction montre même qu'il vise explicitement les maths modernes en dénonçant notamment l'absurdité des obligations langagières du type "*Complétez : 2 cm ont même longueur que … mm ; 80 mm ont même longueur que … cm."*[xii] puisqu'il y est dit explicitement :

> *The fact that "2 yd" and "6 ft" name the same element of the model enables us to say they are equal; there is no need for such mysterious phrases as "2 yd measures the same as 6 ft."*

Ceci prouve entre autres que la pratique du calcul sur les grandeurs est bien plus "moderne" que la réduction du calcul au calcul sur les nombres purs.

---
[10] Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

Et trente après 1970, nous en sommes fondamentalement au même point puisqu'on lit dans le document officiel *Accompagnement des programmes de troisième de collège* :

> *En effet, en mathématiques, on ne travaille pas sur les grandeurs (c'est l'objet d'autres disciplines, comme la physique, la technologie, les sciences de la vie et de la Terre ou la géographie et l'économie par exemple)*[xiii]

* * *

Comment passer à l'abstrait et au logique ?

F. Buisson 1882	W. P. Thurston 1994
La tendance primitive de la pédagogie …est celle de tous les maîtres au début de leur carrière : partir de l'idée générale de la science à enseigner, la décomposer logiquement en un certain nombre de notions abstraites, définir chacune de ces notions, faire apprendre aux élèves ces définitions, puis en déduire les règles ou formules, et continuer ainsi en construisant définition après définition, chapitre par chapitre, tout l'édifice théorique de la science, sauf à leur en faire faire ensuite les applications sous forme d'exercices, de problèmes, d'exemples. Ferdinand Buisson Article *Abstraction*	*In caricature, the popular model holds that* ***D.** mathematicians start from a few basic mathematical structures and a collection of axioms "given" about these structures, that* ***T.** there are various important questions to be answered about these structures that can be stated as formal mathematical propositions, and* ***P.** the task of the mathematician is to seek a deductive pathway from the axioms to the propositions or to their denials.* *We might call this the definition-theorem-proof (DTP) model of mathematics.* William P. Thurston, 1982 Fieds medal *On proof and progress in mathematics*

Une fois admis que l'enseignement des mathématiques vise pour partie la maîtrise par l'élève d'abstractions reliées logiquement, ce qui n'est d'ailleurs pas propre aux mathématiques car tout pensée rationnelle est abstraite, on peut effectivement se demander comment *passer à l'abstrait*. La première erreur consiste à évacuer la question … en enseignant directement l'abstrait. Une autre est de considérer qu'il y a une opposition absolue entre **L**'abstrait et **LE** concret : sans nier cette opposition, on peut considérer que, dans le cadre de l'apprentissage (et de l'histoire de la pensée), l'abstraction en tant qu'action, i.e. "*étendre une vérité en éliminant de son énoncé les termes qui la particularise*"(D'Alembert et Diderot) est en fait un processus dans laquelle chaque étape est en quelque sorte l'abstrait de la précédente et le concret de la suivante. Ferdinand Gonseth traite excellemment en 1935 la question dans "*Les mathématiques et la réalité*"[xiv] aussi bien à propos de la genèse notion de nombre que de celle de points et droites. Nous nous en tiendrons ici à la notion de nombre entier.

Pour donner quelques exemples (réducteurs par rapport à la perspective de Gonseth, beaucoup plus riche), on peut faire remarquer que la notion de nombre entier *10* est plus abstraite que la notion *10 pommes* et que la notion *10 kilomètres*. *10 pommes* représente cependant un réel niveau d'abstraction puisque penser 10 pommes suppose, comme il n'existe pas 10 pommes strictement identiques, que l'on soit capable de ne pas tenir compte de leurs couleurs, de leurs tailles (et que l'on veuille les compter). Mais penser *10 kilomètres* est encore un peu plus abstrait que *10 pommes* puisque il s'agit d'une distance que l'on ne peut percevoir directement par les sens et dont la compréhension suppose si ce n'est celle du système métrique (qui est un *système*, c'est-à-dire une conception théorique) au moins celle de la liaison du kilomètre avec le mètre (qui recouvre la distinction perdue entre *unités fictives* et *unités effectives*).

Ferdinand Gonseth précise "*On peut distinguer dans l'évolution du concept de nombre entier au moins trois époques assez distinctes : la première précède toute tentative consciente de systématisation; la deuxième l'époque spécifiquement arithmétique - se caractérise par une formulation explicite de la théorie des nombres entiers ; la troisième seulement aborde au plan du « logique ». Le passage d'une époque à l'autre s'accompagne d'une transformation profonde de l'essence même du nombre.*"

Il est intéressant de s'appesantir sur le passage du stade arithmétique au stade logique car il va nous amener à définir la notion d'unité et donc celle de nombre concret, c'est-à-dire de nombre suivi d'un nom d'unité.

Pour cela
- considérons l'ensemble des entiers naturels N : {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6,…n…} et l'ensemble des multiples de 2 , nommé 2N : {0, 2, 4, 6, 8, 10, 12 …2×n…}.
- munissons l'ensemble 2N de deux lois de compositions
  - l'une notée + : (2×n) + (2×m) = 2×(n+m)
  - l'autre notée * : (2×n) * (2×m) = 2×(n×m)

(2N, + , *) a bien une structure isomorphe à (N, +,×) par f(n) = 2×n. Donc 2N est bien un modèle de N. Et la structure logique - axiomatique - de N est ce qu'il y a de commun à N et 2N (mais aussi à 3N, 4N, 5N,….)

On pourrait présenter cet aspect logique sous la forme des axiomes suivants que respectent bien (N, + , ×) et tous les (nN, + , *) :

> ***Axiome 1** : A chaque nombre a succède un nombre entier a' différent de a*
> ***Axiome 2** : Seul le nombre 1 ne succède à aucun nombre*
> ***Axiome 3** : Tout nombre succède, directement ou par intermédiaire, à 1*
> *Mais ceci ne suffit pas, car, si la suite 1,2,3,4,5,6….. convient bien, la suite 1,2,3,4,2,3,4,2,3,4… conviendrait aussi . On ajoute donc :*
> ***Axiome 4** : La suite des nombres qui, de proche en proche succèdent à un nombre a quelconque est isomorphe à la suite construite à partir de 1.*

Comme le fait remarquer F. Gonseth :

> " *Avec ces conventions, toutes les opérations arithmétiques effectuables dans la suite des entiers trouvent un équivalent dans la suite des entiers pairs et réciproquement. La suite de tous les entiers et la suite des entiers pairs seulement, considérées sous un certain angle apparaissent donc comme identiques, bien que considérées sous un autre angle nous sachions parfaitement reconnaître en quoi elles diffèrent…*
> *Cette axiomatisation s'accompagne d'une analyse de la notion de nombre qui n'est pas sans valeur: Mais il ne faut pas en exagérer la portée. Dans tous les cas, les axiomes ne sont aucunement des décrets librement et arbitrairement formulés, avec l'intention et le pouvoir de conférer l'existence aux entités que sont les nombres.*
> *En particulier (qu'on veuille se souvenir à cette occasion de notre analyse du géométrique) il y a dans la notion de nombre tout un côté que les axiomes ne touchent pas : c'est justement celui qui, dans l'exercice de la pensée, nous importe le plus ; celui qui se rapporte à l'idée de grandeur et que, par analogie avec le côté spécifiquement géométrique des notions spatiales, nous pourrions nommer le côté spécifiquement arithmétique ou numérique*".

Cet aspect logique n'est effectivement pas *sans valeur* puisque c'est lui

- qui, à terme, est une des bases qui permet quelque chose d'évident pour celui qui le sait mais qui est une conquête importante de l'esprit humain : c'est la même opération 5×3 qui permet de trouver que l'aire d'un rectangle de 3m sur 5m vaut 5m×3m= 15m², de dire que 3×5 heures est égal à 15 heures…
- qui permet, dans la résolution des problèmes d'arithmétique, une fois que l'on a précisé le système d'unités dans lequel on calcule et choisi les opérations à effectuer, de calculer *aveuglement*, c'est-à-dire en ignorant la nature des unités utilisées, en étant sûr de trouver le *bon résultat*
- qui a permis la création de tous les outils de calcul formel.

Mais, comme le dit toujours Gonseth, ***on y perd l'idée de grandeur*** puisque dans ce cas, on assimile 1 et 2 puisque 2 joue le rôle d'unité dans 2N alors que l'on sait très bien qu'ils sont cependant différents. En quelque sorte le fait que tout nombre ne soit pas conçu comme une grandeur vient simplement du fait que l'unité n'est plus conçue comme une grandeur, c'est-à-dire sous la forme d'un nombre concret.
Et c'est là que l'on retrouve la dualité de 1 que l'on peut exprimer [certes pas en primaire et même dans le secondaire] sous la forme 1 = 1× **1** ou 1=1× **u,** ou **u=**1× **u**, **u** étant l'unité, c'est-à-dire la dualité de 1 conçu comme unité et comme premier nombre, ou simultanément comme nombre abstrait et comme représentation abstraite de la grandeur unité. Cette difficulté n'a d'ailleurs été levée historiquement qu'en 1585 par Simon Stevin qui dès la deuxième définition de son *Arithmétique* affirme pour la première fois sous la forme

euclidienne des demandes " *Que l'unité est nombre*". Mais que cette difficulté ait été levée en 1585 n'empêche qu'elle ne peut être levée que si elle a existé pour celui qui apprend.

Quoi qu'il en soit, la maîtrise du calcul sur les grandeurs suppose non seulement qu'il soit enseigné en tant que t*el, c'est-à-dire centralement en tant que calcul sur les différentes grandeurs du Système International (i.e. non as manipulatives*) mais que les grandeurs soient enseignées systématiquement en tant qu'exercices pratiques de mesurage des poids, longueurs, aires et volumes. Charles-Ange Laisant (rédacteur de la revue *L'enseignement mathématique* en 1899) répondait à un parent qui lui demandait quel lycée choisir pour ses enfants :

> "*Avant même de le confier à un établissement quelconque, vous avez le droit et le devoir de vous enquérir de l'esprit de l'enseignement, des méthodes suivies, des conditions de travail, sans pour cela qu'il vous soit besoin d'être mathématicien vous-même.*
>
> *Et surtout, ne vous laissez pas intimider par le directeur, proviseur, principal, peut importe le titre, qui prétendrait que vous vous mêlez de ce qui ne vous regarde pas. Deux observations seulement vont vous donner une idée de la façon dont vous pouvez vous défendre. Pour enseigner le système métrique, il existe des lycées où il n'y a pas un instrument de mesure : mètre, litre, poids, etc.*
> *Pour l'enseignement de la Géométrie, […]*
> *Si donc vous faites des démarches pour l'entrée de votre enfant au collège ou au lycée, par exemple, demandez à visiter le matériel d'enseignement des poids et mesures, les instruments d'arpentage, etc. Si on vous répond qu'il n'y a rien de tout cela dans la maison, sauvez-vous, et ne revenez jamais*"[xv]

Pour terminer reprenons la première leçon du Brouet et Haudricourt Frères, *Arithmétique et système métrique Cours Moyen*, Paris, 1907.

ARITHMÉTIQUE
NOTIONS PRÉLIMINAIRES

> **1**. - On appelle **quantité** tout ce qui peut être augmenté ou diminué, comme une somme d'argent, un nombre d'arbres, la hauteur d'un mur.
> **2**. - L'**unité** est une quantité connue qui sert à mesurer à évaluer toutes les quantités de la même espèce qu'elle.
> Ex. : Si l'on compte les tables de la classe, les arbres de la cour, l'unité est une **table**, un **arbre**.
> **3.** - Un **nombre** est le résultat obtenu en comparant une quantité à son unité.
> Il est *concret* s'il désigne l'espèce d'unité, comme 12 litres; il est *abstrait* s'il ne désigne pas l'espèce d'unité, comme 12.
> **4**. - Il y a trois espèces de nombres
> 1° **Le nombre entier**, qui ne contient que des unités entières : quatre francs : 4 fr.
> 2° **La fraction**, qui ne contient que des parties de l'unité : vingt-cinq centimètres : 0m,25; - deux tiers : 2/3.
> 3° **Le nombre fractionnaire**, qui est un nombre entier accompagné d'une fraction : trois francs quarante centimes : 3fr. 40 - deux unités un tiers : 2 1/3
> **5**. - L'**arithmétique** est la science des nombres et du calcul.
> **6**. - Le **calcul** est l'art de combiner les nombres.

Deux objectifs du calcul sur les grandeurs

Introduction au calcul dimensionnel : contre l'ordre de grandeur sans les grandeurs

Michèle Artigue, spécialiste reconnue de la didactique des mathématiques, nous dit en 1992:

> *On a volontairement posé des problèmes "idiots "aux élèves. Des animateurs de l'IREM de Grenoble, il y a une dizaine d'années, osèrent aller plus loin dans la rupture du contrat usuel, posant à des élèves de l'école élémentaire des problèmes idiots comme: "Dans une classe, il y a 4 rangées de 8 places, quel âge a la maîtresse ?' ;… Et, scandale ! On s'aperçut que les élèves de l'école élémentaire s'appliquaient dans leur grande majorité, comme si de rien n'était, à résoudre ces problèmes, ne choisissant même pas au hasard les opérations : la maîtresse était créditée de 32 ans.*[11]

Il n'y a à mon avis aucun scandale dans la démarche de l'élève[12] qui ne restitue que ce qu'on lui a appris et qui est conforme aux programmes officiels depuis 30 ans. Lorsque

> - l'on n'a appris que les nombres purs à un élève et qu'on ne lui a donc pas donné de définition des opérations (ce qui n'est possible - et était fait dans le chapitre sens de l'opération - qu'en utilisant les grandeurs), il n'a aucun critère qui lui permet de deviner quelle opération il doit choisir et de vérifier ensuite si le résultat est cohérent en termes d'analyse dimensionnelle
>
> - de plus, on a insisté lourdement sur la nécessité de calculer l'ordre de grandeur, ce calcul de l'ordre de grandeur devient la seule règle que l'élève connaît pour deviner quelle opération il doit employer,

l'élève procède de la manière suivante : il calcule 8+4 = 12, 8-4=4, 8x4=32, 8:4=2, 4:8=0,5 et, comme en terme d'ordre de grandeurs, l'institutrice ne peut avoir 12 ans, 4 ans, 2 ans, 6 mois, elle ne peut donc avoir que 32 ans.

N'ayant aucune définition de la multiplication, il ne peut savoir que toute multiplication peut se ramener à une multiplication définie par un multiplicande, nombre concret ayant une unité donnée et d'un multiplicateur qui indique le nombre de répétitions de ce multiplicande, le produit ayant même unité que le multiplicande.

S'il l'avait su, il aurait pu choisir soit le nombre de places soit le nombre de rangées comme multiplicande, mais il aurait pu vérifier que, dans chacun des cas, le résultat de la multiplication ne pouvait être une durée exprimée sous forme de nombre d'années. S'il avait même connu la règle qui dit (Autre règle sous-entendue extrêmement importante au début de l'enseignement : *on écrit toujours le multiplicande en premier*) : *Si tu veux des mètres dans une multiplication, tu commences par des mètres*, il n'aurait même pas écrit de multiplication car, en écrivant le multiplicande (que ce soit des places ou des chaises), il aurait su qu'il ne pouvait obtenir des années comme produit.

Il serait un peu long de développer les règles du calcul dimensionnel pour chaque opération (*et la manière dont on peut les exprimer de la façon la plus parlante et la plus juste possible suivant les niveaux d'enseignement*). Mais il est toujours possible d'expliciter ce que l'on n'apprend plus, qui est la définition d'une opération car les enfants doivent seulement s'en construire une "image mentale"[13]. Nous choisirons la définition de la multiplication prise dans le *Brouet et Haudricourt Frères*, Arithmétique et système métrique Cours Moyen, *Librairies-Imprimeries réunies, Paris, 1912* en notant que toutes les "autres multiplications" (*id est* par exemple, 3€/m × 5m= 15€, 3m × 5m = 15m^2, 3m^2 × 5m = 15m^3…) doivent d'abord être enseignées sous cette forme.

---

[11] Michèle Artigue, *Mathématiques : les leçons d'une crise*,Sciences et Vie Hors Série N°180 de Septembre 1992, pages 46 – 59.
Pour une critique plus complète, lire :
Michel Delord, *Michéle Artigue et l'âge du capitaine*, sept. 2003 http://michel.delord.free.fr/captain1-0.pdf

[12] Il y a cependant plusieurs scandales dans ce texte mais ils sont le fait de Michèle Artigue et de la communauté didacticienne qui n'a pas réagi à cet article 13 ans après sa publication. En effet, alors qu'il se présente comme un bilan de la période des maths modernes, il fait retomber l'échec de cette réforme comme d'habitude "sur les enseignants qui n'étaient pas assez formés". Mais il ne mentionne jamais une responsabilité basée sur une erreur théorique de ses concepteurs et notamment celui de l'abandon du "calcul sur les grandeurs" alors qu'ils ont eux-mêmes dit qu'il s'agissait de l'élément central de cette réforme. Qui plus est, lorsque M. Artigue analyse les erreurs des élèves, elle ne fait pas intervenir le non-enseignement des grandeurs dans sa problématique, ce qui l'oblige à introduire un nouveau concept - le contrat didactique- qui a justement pour fonction de masquer cette absence.

[13] Bien sûr, comme tout le monde, un élève a des *images mentales* des notions mathématiques. Mais le rôle de l'enseignant n'est pas de contrôler ces images qui font partie du domaine de l'inventivité présente et future des élèves : il n'a qu'à vérifier que ces images sont compatibles avec les connaissances scolaires. Le premier droit d'un élève est de penser que 2 est rouge et que 3 est jaune : le principal travail de l'enseignant est de vérifier qu'il sait que 2+3=5 et 2×3=6…

MULTIPLICATION

68.- La **multiplication** est une opération par laquelle on répète un nombre appelé **multiplicande** autant de fois que l'indique un autre nombre appelé **multiplicateur**.
Le résultat se nomme **produit**.
[…][14]
70. - Le multiplicande et le multiplicateur se nomment les **facteurs** du produit.
71. - La multiplication s'indique par le signe × (**multiplié par**) qui s'écrit entre les nombres à multiplier : 8 × 5 (*8 multiplié par 5*).
72. - La multiplication n'est qu'une *addition abrégée*.
73.- Le *multiplicande* est toujours un nombre *concret*, c'est-à-dire qui exprime des objets déterminés, comme des arbres, des mètres, des francs, etc.
74.- Le *multiplicateur* est un nombre *abstrait*, qui indique seulement combien de fois on répète le multiplicande.
75.- Le *produit* exprime toujours des **unités** *semblables* à celles du multiplicande.

Mathématiques "supérieures" et enseignement du calcul élémentaire

L'affirmation du BO de 1970 déjà citée *Les phrases telles que 8 pommes + 7 pommes = 15 pommes n'appartiennent [pas] au langage mathématique* est bien sûr une stupidité qui a surtout pour fonction d'interdire l'écriture de $2m + 3m = 5m$, celle de $2m = 20dm$ et en fait tout calcul sur les grandeurs. Mais il est plus important de comprendre les raisons de cette interdiction. Dans la problématique "axiomatique" dans laquelle se placent les auteurs de ces lignes,

i) il n'est pas question d'introduire dans l'enseignement une notion dont on n'a pas défini le contenu purement mathématique,
ii) il y a un ordre dans l'enseignement des connaissances - ce qui est tout à fait vrai - mais cet ordre doit être justement celui de l'axiomatique ;

Or, dans ce cadre de pensée, la structure algébrique la plus simple qui peut contenir des expressions comme $2m$ ou $2m + 3m = 5m$ est celle d'espace vectoriel à une dimension qui suit logiquement, mais de très loin, celle de nombre entier. Et comme il était impossible d'introduire la notion de vecteur au grade 2, au moment où l'on apprend les entiers, on supprimait l'apprentissage de notions telles que $2m + 3m = 5m$ ou $2\$ + 3\$ = 5\$$ parfaitement compréhensibles au niveau intuitif par tout le monde … sauf par les enseignants.

Tout au contraire, il est extrêmement important

i) d'apprendre, si l'on s'en tient à la question des grandeurs, dés le plus jeune âge - dans le cadre d'un curriculum strictement organisé, bien sûr -, à écrire des identités du type $2m + 3 = 5m$, $2m^2 + 3m^2 = 5m^2$, $2m^3 + 3m^3 = 5m^3$, $2\times3m= 6m$, $2m\times3m= 6m^2$, $2m\times3m^2= 6m^3$ bien sûr en ne faisant aucune allusion à leur caractère d'identité algébrique et en ne les justifiant que comme calcul sur les mesures de longueur, d'aire et de volume. Mais, ce faisant, on introduit des schémas de pensée que l'on retrouvera entre cinq et dix ans plus tard car elles ont la même grammaire que celle non pas des fonctions monômes mais celle des monômes formels ($2x + 3x = 5x$, $2\times3x= 6x$, $2x\times3x= 6x^2$, $2x\times3x^2= 6x^3$…)

ii) d'une manière plus générale, de ne jamais hésiter à introduire une notion si elle est comprise de manière intuitive même si l'on ne peut en donner une stricte définition mathématique à ce moment car cet entraînement pratique servira à son tour de base intuitive pour l'introduction ultérieure de sa [plus] stricte définition mathématique.

- Un exemple peut en être la propriété suivante des mesures : *si l'unité u est divisée par un nombre, la mesure est multipliée par ce nombre*. Cette propriété, comme la proportionnalité inverse et les propriétés

[14] Le N°69 donne une définition de la multiplication liée à la proportionnalité :
On définit encore la multiplication ainsi :
*69. – La multiplication est une opération qui a pour but de trouver un nombre appelé **produit** qui soit par rapport au **multiplicande** ce que le **multiplicateur** est par rapport à l'**unité**.*

qui font intervenir deux variables à produit constant, est un exemple de contravariance qui ne pourra être mathématisée que beaucoup plus tard, probablement à l'Université. La raison de l'abandon total de la notion de proportionnalité inverse et de ses applications tient surtout au fait qu'il n'y avait pas de "fonctions inversement linéaires" dont l'*additivité* aurait été caractérisée par … $f(x)+f(y) = f(x)f(y)/f(x+y)$!!!

- Un autre exemple consiste inversement à ne pas refuser de prendre appui de manière intuitive sur une notion déjà enseignée pour en introduire une nouvelle : l'exemple le plus intéressant est de s'appuyer sur la structure semi-polynomiale de la numération de position pour introduire directement au grade 8 ou 9 le calcul algébrique en considérant le polynôme formel comme une extension de la notion de nombre entier. Ceci revient à faire poser les opérations sur les polynômes exactement comme les opérations sur les nombres entiers[15] car du fait que $3021 \times 201 = 607\ 221$, on peut déduire que $(3x^3+2x^1+1) \times (2x^2+1)= 6x^5+7x^3+2x^2+2x+1$.

Le calcul numérique : de l'arithmétique aux axiomes de corps

Bien sûr, l'enseignement mathématique actuel a abandonné les formes les plus extrêmes des mathématiques modernes (dessin de patates, géométrie sans figures…) qui assimilaient intégralement les débuts de l'enseignement des mathématiques à l'enseignement des fondements des mathématiques[16]. Mais restent la problématique fondamentale des maths modernes qui est en fait de viser directement l'enseignement des notions les plus abstraites[17] que l'on retrouve encore sur l'apprentissage du calcul. Tout le calcul numérique en primaire est certes mathématiquement ce qui correspond aux axiomes de corps ou d'anneaux commutatifs mais ceux-ci

- sont des axiomes c'est-à-dire qu'ils définissent le minimum de règles nécessaires pour effectuer tous les calculs
- portent sur deux opérations (× et +) dont le seul lien est la distributivité de × par rapport à +.
- sont exprimés sous forme d'égalités algébriques (*i.e.* qui sont écrites en lettres)

Si la compréhension de la nécessité de ces axiomes est un objectif de l'enseignement secondaire, on ne peut les prendre même comme bases de l'enseignement en primaire car

a) Symétrie de l'égalité?

L'écriture des ces axiomes suppose la compréhension du caractère symétrique de la relation = et le fait que ce signe sépare deux expressions différentes du même nombre, ce qui est un objectif de l'enseignement primaire mais non un point de départ de celui-ci. Le sens spontané que l'élève (si on lui a appris les algorithmes des opérations) donne au signe "=" est le suivant : il sépare les nombres de départ (à gauche) du résultat de l'opération (à droite) et symbolise le mécanisme qui permet de passer de la droite à la gauche. C'est-à-dire que, *a priori*, les écritures $15 = 8 + 7$ et $4 + 2 = 2 \times 3$ ne signifient rien pour de jeunes élèves ou pire, ne signifient pas ce que l'enseignant pense s'il force l'élève à l'écrire.

---

[15] Cette introduction du calcul polynomial a été utilisée pour la dernière fois en France dans les années 1960 (par exemple, M.Monge et M. Guinchan, *Mathématiques, classe 4e*, Librairie classique Eugène Belin, 1965) et mais on la retrouve aux USA à la page 300 du *Algebra1* de Dolciani, William Wooton, Edwin Beckenbach, (Houghton Mifflin Company, Boston, 1974).

[16] On est même allé jusqu'à demander, la théorie des ensembles étant *insuffisamment fondamentale*, que l'on enseigne la théorie des catégories et celle des filtres Voir, par exemple, le n° 302 du Bulletin de l'A.P.M.E.P. (Février 1976) et la réponse de Henri Cartan sur l'enseignement des filtres au lycée : http://michel.delord.free.fr/cartan75.pdf

[17] On pourrait parler "d'enseignement conceptuel" au sens ou l'on tente d'enseigner directement le "concept", problématique qui s'est maintenant étendue à toutes les matières :

> "*Les disciplines de l'école primaire sont - signe de l'unification de ce qu'on appelle aujourd'hui le « système éducatif » - désignées, dès la maternelle, de la même manière que dans le secondaire. De même qu'on ne fait plus au primaire du dessin ou de la gymnastique, mais des arts plastiques et de l'éducation physique et sportive, on ne fait plus non plus des sciences naturelles, encore moins de l'histoire naturelle, mais de la biologie. L'unification de l'école a fait voler en éclats le paradigme pédagogique d'une progression du simple au complexe. En vue de leur scolarité future anticipée, on fait entrer d'emblée les élèves dans la complexité des savoirs qu'ils doivent maîtriser dès leur plus jeune âge pour pouvoir les monnayer le mieux possible ensuite, à l'adolescence.*
> *Exit le modèle de la leçon de choses conçue comme leçon d'observation. Dès l'école primaire, on n'apprend plus des « choses », mais des* ***concepts*** (souligné dans l'original - MD) *: non plus le système digestif, mais la digestion ; non plus les fonctions principales de la vie, mais la construction du concept de vivant. Quant aux classifications descriptives des trois règnes de la nature, qui faisaient le corps du cours de sciences du Cours élémentaire au Cours supérieur, elles perdent à la fois leur légitimité pédagogique et leur légitimité épistémologique*."

Pierre Kahn, *De l'enseignement des sciences à l'école primaire; l'influence du positivisme*, Hatier,1999.
http://pst.chez.tiscali.fr/svtiufm/positivi.htm

b) Deux ou cinq opérations arithmétiques?

Les enfants doivent apprendre quatre opérations (**+, -, ×, :**) et non pas deux.

De plus, il faut prendre en compte la remarque profonde de Ron Aharoni :*"One is that in fact there are **five** operations. Beside the four classical operations there is a fifth one, more basic and important: that of **forming a unit**"*. En ce sens, **1** n'est pas essentiellement l'élément neutre de la multiplication, "multiplier par 1 ne change pas le résultat", mais signifie tout d'abord que tout nombre entier est un multiple de l'unité choisie que l'on note **1**.

c) Distributivité = associativité?

Les liens entre l'addition et la multiplication enseignées ne correspondent pas à la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition

- la distributivité de × / + elle-même apparaît essentiellement pour l'enfant qui apprend sous la forme " *Pour multiplier une somme par un nombre, il faut multiplier chaque terme de la somme par ce nombre*", c'est-à-dire

i) seulement le sens de la droite vers la gauche de a×(b + c) = a×b + a×c
ii) sans limitation du nombre des termes de la somme

- pour l'enseignement primaire, elle est plus en lien avec la propriété suivante de la multiplication " *Pour multiplier un produit par un nombre, il suffit de multiplier un facteur du produit par ce nombre* ", qui est elle-même une expression non symétrique de l'associativité de la multiplication [*id est* k × (a × b) = (k × a) × b]. Si l'on veut s'exprimer en "termes d'axiomes", le sens *développement* de la distributivité de ×/+ apparaît plutôt comme la non-distributivité de la multiplication par rapport à elle-même.

d) Multiplication et division

Comme la division n'apparaît pas dans la liste des axiomes de corps ou d'anneau, la compréhension, par exemple, des liens qui existent entre la division et la multiplication ne peut non plus apparaître. Or les trois propriétés suivantes (la dernière étant l'application simultanée des deux premières), qui ne font pas partie des axiomes d'anneau ou de corps,

i) *Si l'on multiplie le dividende d'une division par un nombre, le quotient est multiplié par ce nombre*.
ii) *Si l'on multiplie le diviseur d'une division par un nombre, le quotient est divisé par ce nombre*.
iii) *Si l'on multiplie le dividende et le diviseur d'une division par un nombre, le quotient ne change pas*[18].

sont cependant fondamentales car elles sont à la base de la compréhension

1) de la simplification des fractions
2) de la justification de l'algorithme de la division des nombres décimaux pour la iii

e) Commutativité de la multiplication

Même si un des axiomes est directement nécessaire dans l'enseignement primaire, le statut de son enseignement n'est pas celui qu'il a dans une visée plus purement mathématique. Si l'on prend l'exemple le but initial de l'enseignement de la commutativité de la multiplication

i) on ne l'enseignera pas sous la forme a×b = b×a (et encore moins avec des quantificateurs) mais sous la forme *Le produit de deux nombres ne change pas si l'on change l'ordre de ses facteurs*

ii) son utilité principale est

- de pouvoir, lors de la pose d'une multiplication, mettre "en haut" le nombre qui a le plus de chiffres significatifs
- de vérifier une multiplication en la posant à l'envers.

[18] Et le reste est multiplié par ce nombre. Ceci est la base d'un exercice qui permet de savoir si un élève a réellement compris la division d'un décimal par un décimal : *Lire, sur la division posée, le reste correspondant au quotient au 1/10 de 2,3753 par 0,7.*Réponse, bien entendu : 0,653 car 0,7×3,3 + 0,653 = 2,3753.

f) Arithmétique et langue maternelle

Aucune des règles de calcul que je viens de donner n'utilisent de formulation algébrique mais sont au contraire exprimées dans la langue maternelle. La raison principale n'est pas que les élèves risquent de ne pas saisir la richesse de ces formulations en en ayant une compréhension seulement formelle - ce qui est un risque réel - mais surtout que la véritable compréhension de l'abstraction passe toujours par une explicitation dans la langue maternelle. Une conséquence en est que la bonne maîtrise des mathématiques, à quelque niveau que ce soit ce coup-ci, suppose une bonne maîtrise de la langue qui n'est elle-même possible que par une maîtrise particulièrement solide de la grammaire qui permet d'en exprimer la subtilité. Cette dépendance est d'autant plus vraie que les mathématiques sont parmi toutes les matières celle qui nécessite peut-être le plus de précision dans l'énoncé de leur raisonnement et de leurs propriétés.

> "*Notre langue exprime par ses flexions, par l'ordre même des mots des nuances infiniment […] délicates […]. La moindre de ces nuances peut vicier un raisonnement mathématique où l'on doit suivre rigoureusement la ligne droite et où le moindre écart est interdit. Pour comprendre ces nuances, il faut avoir appris à les sentir; il faut en avoir acquis une longue habitude pour les saisir du premier coup sans hésitation et sans effort. L'enfant comprend les phrases en bloc pour ainsi dire, et si on le laissait faire il les écrirait toutes en un seul mot. Chaque mot est comme un centre d'associations d'idées, comme un fanal qui éclaire tout un canton de la conscience ; les divers mots d'une même phrase luisent en même temps ; leur lumière se mêle ; les champs qu'ils éclairent empiètent l'un sur l'autre, sans que l'on puisse dire duquel de tous ces phares tel ou tel point tire le plus de lumière.*
>
> *C'est là comprendre comme voit le myope à qui les divers points de l'objet apparaissent comme des taches débordant les unes sur les autres, et pareilles à celles que l'on admire dans certains tableaux modernes.*
>
> *C'est cette sorte d'illumination continue qu'on appelle d'ordinaire l'intelligence d'une phrase. Beaucoup d'hommes, même adultes, n'en demandent pas davantage ; les plus raffinés d'entre nous s'en contentent même neuf fois sur dix ; cette façon de comprendre le français suffit en effet pour les usages ordinaires de la vie. Chaque phrase nous suggère, par le simple jeu de l'association des idées, les mouvements appropriés; quand on nous dit, allez à droite, les muscles qui nous dirigent vers la droite se contractent tout seuls. C'est assez pour vivre.*
>
> *Mais c'est déjà trop peu dans bien des cas pour la plupart des hommes civilisés; c'est tout à fait insuffisant pour quelque chose d'aussi subtil que le raisonnement mathématique. Dans ce laminoir délicat, les phrases en bloc ne peuvent pas passer; il faut lui présenter des matériaux moins grossiers, réduits pour ainsi dire en petits morceaux par l'analyse verbale.*
>
> *Pour celui qui n'est pas exercé à cette gymnastique des mots, [les expressions]*qui multiplie, *ou* que multiplie*, ne représentent pas tout d'abord l'idée d'un pronom relatif au nominatif ou à l'accusatif, mais je ne sais quelle vague notion de multiplication ; de cette vague notion le mathématicien n'a que faire.*"

Henri Poincaré, in *Les sciences et les humanités*[xvi], Paris, A. Fayard, 1911.

Bref historique de la disparition de l'enseignement des opérations[19]

1978

"Nul n'aurait imaginé, il y a quinze ans, la floraison d'appareils peu onéreux, à la portée de chacun et d'abord des élèves. Aujourd'hui la question n'est plus de savoir si le calcul va reculer, mais quand il va disparaître."
Simon Nora, Alain Minc,
in *L'informatisation de la société*, rapport pour la présidence de la République

1882 - 1970 :

CP : Numération jusqu'à 100 et 4 opérations (multiplication et division par 2 et 5)
CM : Maîtrise de toutes les opérations sur les entiers et les décimaux

1970
(Arrêté du 2 Janvier 1970 – BOEN N°5 du 29 Janvier 70)**:**

CP : Numération, addition.
CM : Multiplication des décimaux au programme, mais ne figure plus que la "*division exacte d'un nombre décimal par un nombre décimal*" (page 376) pour laquelle "*l'on se limitera dans les exercices à des nombres simples*" (page 377). Le quotient approché ne sera plus traité que dans les exercices :
" *7.2 2.5. Quotient approché : Le sens des expressions quotient à 1; 0,1; 0,01 près pourra être précisé à l'occasion d'exercices*" (page 377).

Programmes 2002 :

CP : "*A la fin du cycle 2* [*id est* CE1]*, seule la technique opératoire de l'addition est exigible.*"
CM (Compétences maximales exigibles) :

a) ***Opérations sur les entiers*** :
Multiplication : "*Calculer le produit de deux entiers (3 chiffres par 2 chiffres) par un calcul posé* "
Division : "*Calculer le quotient et le reste de la division euclidienne d'un nombre entier (d'au plus 4 chiffres) par un nombre entier (d'au plus 2 chiffres)*"

b) ***Opérations sur les décimaux*** :
Ne restent que l'addition et la soustraction des décimaux, la multiplication d'un nombre décimal par un entier.
Supprimées du programme du primaire :
1980 : division de deux nombres décimaux.
1995 : multiplication de deux nombres décimaux.
2002 : division d'un nombre décimal par un nombre entier.

Prérapport commission Thélot (Sept. 2004) :

CP-CE1 : "*Compter*"
CE2- Sixième : "*Calcul*"
Cinquième-troisième : "*Opérations mathématiques*"

****

[19] Lire : "*Quelques éléments sur l'enseignement primaire- 27 février 2004*" :http://michel.delord.free.fr/synth-prim.pdf

Notes de fin

[i] *Ueber angewandte Mathematik in ihrer Bedeutung für den Unterricht an den höheren Schulen,* cité par *Ludovic Zoretti*, *in* Préface de *Leçons d'algèbre à l'usage des classes de mathématiques*, Deuxième édition, Vuibert , 1921.

[ii] Antoine Prost, *Histoire générale de l'enseignement et de l'éducation en France, Tome IV: L'école et la famille dans une société en mutation (1930-1980)*, Nouvelle Librairie de France, G.-V. Labat – Editeur, Paris, 1981.

[iii] *Renegotiating secondary school mathematics: A study of curriculum. Change and stability*, Barry Cooper, The Falmer Press, 1985. (http://membres.lycos.fr/sauvezlesmaths/Textes/IVoltaire/cooper.htm)

[iv] *Henri Poincaré, La Valeur de la Science*, Ernest Flammarion, éditeur, Paris, 1927, 280 pages.
Chapitre V : L'analyse et la physique, p.138.
L'intégralité du texte est disponible à : http://www.ac-nancy-metz.fr/enseign/philo/textesph/Valeurdelascience.rtf

[v] http://www.sauv.net/prim

[vi] http://michel.delord.free.fr/fb_intuit.pdf

[vii] Ferdinand Buisson in *Calcul intuitif*, *Dictionnaire de pédagogie d'instruction primaire*, Hachette, 1887.
Tome 1 de la première partie, pages 316 à 317. http://michel.delord.free.fr/fb-calcintuit.pdf

[viii] BOEN, N°5, Jeudi 29 Janvier 1970.

[ix] Marguerite Robert, *Un nouvel état d'esprit*, In *La mathématique à l'école élémentaire*, Paris, Supplément au bulletin APMEP n°282, 1972, 502 pages, page 17.

[x] BOEN, page 355.

[xi] *The Mathematics of Physical Quantities*
Part I: Mathematical Models for Measurement, February 1968
Part II: Quantity Structures and Dimensional Analysis, July 1968
In *American Mathematical Monthl*y. Vol. 75.
Introduction is at http://michel.delord.free.fr/h_whitney.pdf

[xii] Exercice de la page 108 de : Louis Postel, Roland Moujan, *Mathématique au CE*, classiques Sudel, 1970.

[xiii] http://www.cndp.fr/textes_officiels/college/programmes/acc_prg3/acc_prg3_maths.pdf

[xiv] Ferdinand Gonseth *Les Mathématiques et la réalité : Essai sur la méthode axiomatique*, 1936. (Réédition: Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, Paris,1974.) Extraits :
Chapitre IV : le double visage de l'abstrait http://michel.delord.free.fr/gonsethg.pdf
Chapitre VI : la nature du nombre entier http://michel.delord.free.fr/gonsethn.pdf

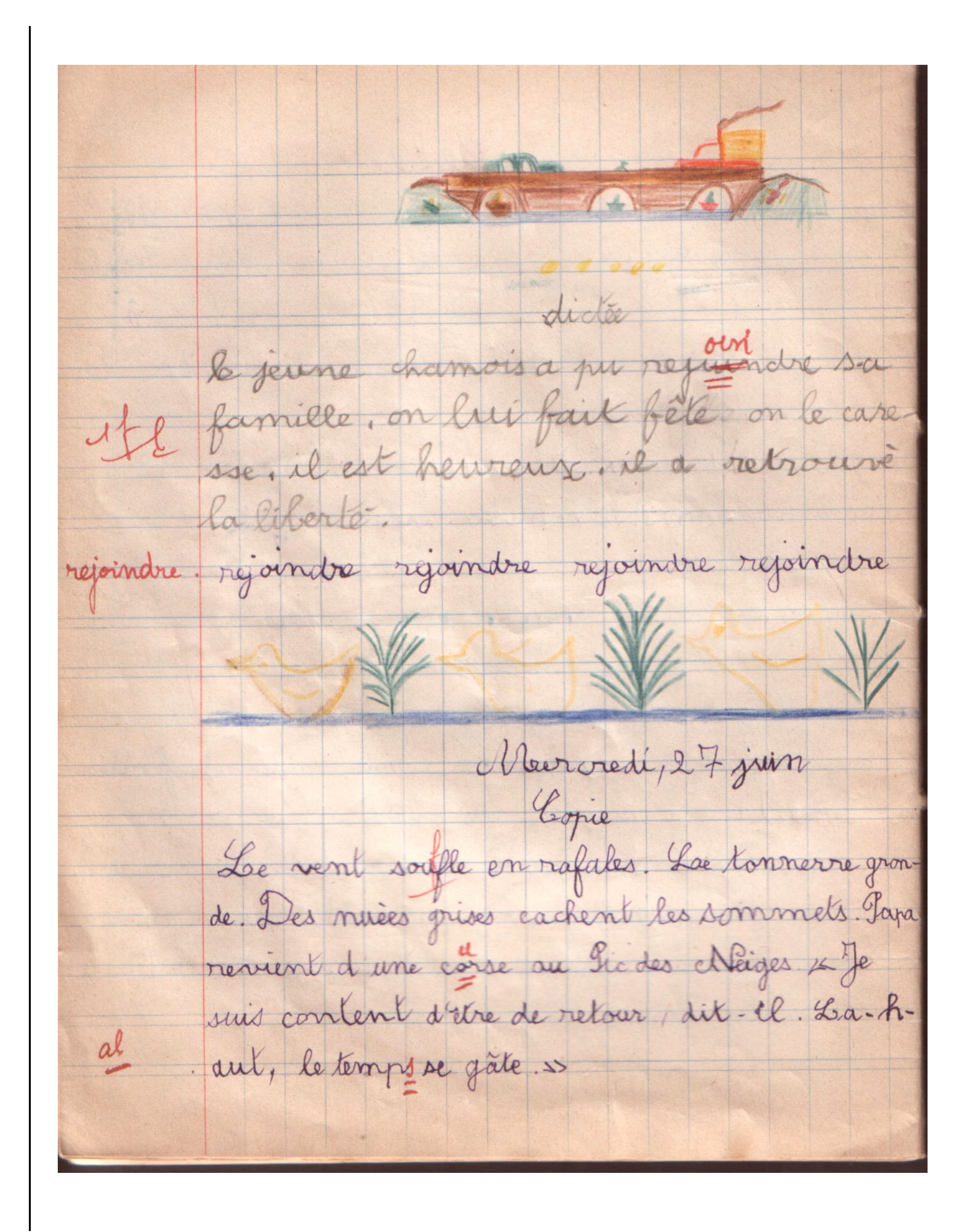
[xv] C-A Laisant, Initiation mathématique, Paris, 1910, dixième édition : http://michel.delord.free.fr/lais-init1.pdf

[xvi] http://michel.delord.free.fr/poincare-sh.pdf

Cahier de CP 1956

Journées du 27 au 30 juin 1956

Ecole des Chapélies 19 Brive



dictée

le jeune chamois a pu rejoindre sa famille. on lui fait fête. on le caresse. il est heureux. il a retrouvé la liberté.

rejoindre. rejoindre rejoindre rejoindre rejoindre

Mercredi, 27 juin

Copie

Le vent soufle en rafales. Le tonnerre gronde. Des nuées grises cachent les sommets. Papa revient d'une corse au Pic des Neiges « Je suis content d'être de retour, dit-il. La-haut, le temps se gâte. »

Calcul

47 + 59 = 106	98 × 2 = 196	26 ÷ 5 : 25, 5, reste 1

l'épicier avait 50 choux-fleurs
il en vendu 18.
il lui reste
50-18=32 choux-fleurs

$$50 - 18 = 32$$

Devoir

J'équipe un guide.
Je lui donne un sac, une corde, un piolet.

J'équipe un pêcheur.
Je lui donne une épuisette, une ligne, un panier.

J'équipe un chasseur.
Je lui donne une cartouchière, un fusil, un cornier,

dictée

le vent souffle, siffle le tonnerre gronde. la pluie tombera sur la mon-tagne. quel vilain temps.

Vendredi, 29 juin

Copie

Deux jours après, les cordées sont revenues au complet. Accablé de fatigue, Jean Servoz a dormi vingt-quatre heures d'affilée. En revenant il a dit simplement : « Les malheureux se croyaient perdus. Nous les avons sauvés ! »

Calcul

95
+ 35
130

86
− 52
34

75
× 2
150

On partage 30 bonbons entre 5 enfants
Chacun aura
30 : 5 = 6 bonbons.

dictée

dans la salle à manger il y a une vaste cheminée, un vieux buffet, une longue table avec des fleurs.

Samedi 30 juin
Copie

C'est tout un voyage d'aller du Val-Perdu à l'usine d'Arlettaz. La famille Servoz l'entreprend par un beau jour d'automne. Dans le froid aigrelet du matin, nos voyageurs descendent d'un pas alerte jusqu'à Thorenz. M. Duval les attend.

Calcul

87
+ 28
115

64
− 38
26

27
× 5
135

34 | 5
30 | 6
4

dictée

l'électricité donne la lumière la chaleur elle met en marche des trains, des moteurs le téléphone.

froid. froid. froid. froid. froid. froid.